第三节 微积分基本定理

一、积分上限函数及其导数

二、微积分的基本定理

一、积分上限函数及其导数

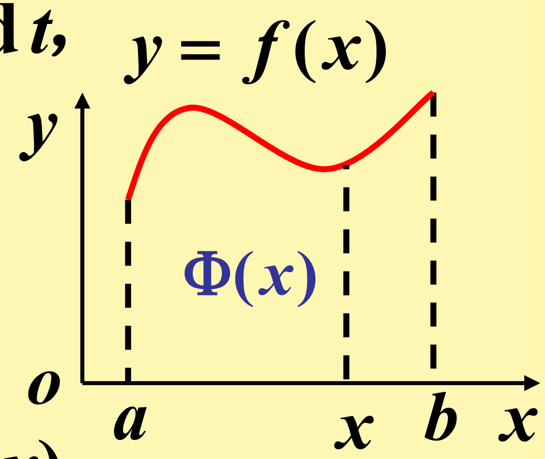
定义 设$f(x)\in C[a,b]$, $\forall x\in[a,b]$,

考察$f(x)$在$[a,x]$上的定积分$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$,

x在$[a,b]$上任意取定一个值时,

上面积分有确定的值与之对应,

它在$[a,b]$上定义了一个新的函数$\Phi(x)$



$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

称为积分上限函数

定理1. 若 $f(x)\in C[a,b]$，则积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ 在}[a,b]\text{上可微，}$$

$$\text{且有}\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$$

证明: $\forall\, x, x+h\in[a,b]$，有

$$\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\Big[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big]$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}f(\xi)(x+h-x)=f(\xi)$$

ξ介于x与$x+h$之间

$$\therefore\ \Phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$$

$\because f(x)\in C[a,b]$

$$=\lim_{h\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$$

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的；

（2）给出了积分变限函数的求导公式：

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -\frac{d}{dx}\int_b^x f(t)dt = -f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{d\left(\int_a^u f(t)dt\right)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f(u)\varphi'(x)$$

令 $u=\varphi(x)$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt + \int_{\psi(x)}^a f(t)dt\right]$$

$$= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)$$

例1. $\left(\int_{2x}^{\sin x} u^2 e^{-u}\,\mathrm{d}u\right)'$

$$= (\sin x)^2 e^{-\sin x} \cdot \cos x - 4x^2 e^{-2x} \cdot 2$$

例2 求由参数表达式$x = \int_0^t \sin u\,\mathrm{d}u,\ y = \int_0^t \cos u\,\mathrm{d}u$

所给定的函数y对x的导数。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t$$

例3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{\int_0^x (1-\cos t)\mathrm{d}t} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$

$F(x)=\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t \Rightarrow F'(x)=e^{x^2}-1 \Rightarrow F(x)$连续

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = \int_0^0 (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t = 0$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x[\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{(x-1)^2}$

解: 令 $\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u = f(t)$

(因为 e^{-u^2} 处处连续，所以 $\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u$ 是 t 的连续函数。

则积分 $\int_1^x[\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}t$ 是变上限 x 的函数)

$$\left(\int_1^x[\int_t^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u]\mathrm{d}t\right)' = \left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x) = \int_x^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$\text{原极限} = \lim_{x\to 1}\frac{\int_x^1 e^{-u^2}\mathrm{d}u}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{-e^{-x^2}}{2} = -\frac{1}{2e}$$

二、微积分基本定理
(牛顿—莱布尼兹公式)

在变速直线运动中, 已知位置函数 $s(t)$

与速度函数 $v(t)$ 之间有关系: $s'(t)=v(t)$

即: $s(t)$是$v(t)$的原函数

$[T_1, T_2]$内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1)$$

定理2. 设$F(x)$是连续函数$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (牛顿–莱布尼兹公式)

定理2. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ (牛顿–莱布尼兹公式)

证: 根据定理 1, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 故

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C$$

令 $x = a$, 得 $C = F(a)$, 因此 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$

再令 $x = b$, 得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \xlongequal{\text{记作}} \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$$

当 $a = b$ 时也成立

当 $a > b$ 时: $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

牛顿—莱布尼兹公式

把求定积分问题转化为求原函数的问题.

★ 微积分基本定理

设$F'(x)=f(x)$

牛顿——莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi_1)(b-a) = F'(\xi_2)(b-a) = F(b)-F(a)$$

积分中值定理

微分中值定理

可以取$\xi_1=\xi_2\in(a,b)$

例5. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x \Big|_{-1}^{\sqrt{3}}$

$$= \arctan\sqrt{3} - \arctan(-1) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{7}{12}\pi$$

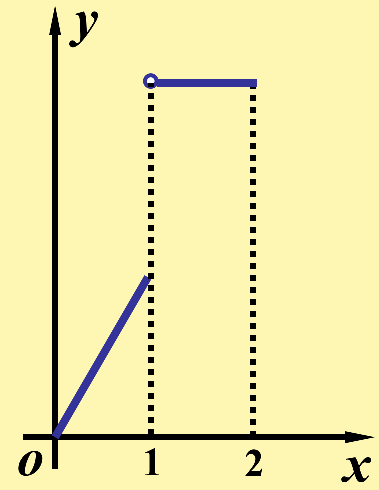
例6. $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ $P180-ex$ 2.(2)或P178-Ex 16

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{-x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= [\arcsin\frac{1}{x}]_{-2}^{-\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$$

例9. 设$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$



计算第二个积分时，在[1,2]上规定

当$x=1$时$f(x)=5$

原式$=\int_0^1 2x\mathrm{d}x+\int_1^2 5\mathrm{d}x=6$

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在，令

$$F(x)=\begin{cases} f(a^+), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ f(b^-) & x=b \end{cases}$$

则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b F(x)dx$

$f(x)$ 可以在端点处无定义！

例10. 已知$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$，求$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

分析：$\int_{-1}^{-3} f(t)\,\mathrm{d}t$与$\int_{-1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$求法不同，

先视 x 为常数，分段讨论.

解：当$x<0$时，$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x} t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x^2-1)$

当$x\ge 0$时，$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0} t\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\cos t\,\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{2}+\sin x$$

所以$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-1), & x<0\\ -\frac{1}{2}+\sin x, & x\ge 0\end{cases}$.

例10. 已知$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$, 求$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

$$\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-1), & x<0\\ -\frac{1}{2}+\sin x, & x\ge 0\end{cases}.$$

区别：求$\int f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\sin t+C_1, & t\ge 0\\ \frac{1}{2}t^2+C_2, & t<0\end{cases}$, $\Rightarrow C_1=C_2$

所以$\int f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\sin t+C, & t\ge 0\\ \frac{1}{2}t^2+C, & t<0\end{cases}$.

例11 已知$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,求$f(x)$

解: 令$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=a$ $\quad\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=b$

则$f(x)=x^2-ax+2b$ $\quad\int_0^2(x^2-ax+2b)\mathrm{d}x=a$

$$\int_0^1(x^2-ax+2b)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=b$$

积分得$[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+2bx]_0^2=a\Rightarrow 3a-4b=\frac{8}{3}\qquad(1)$

$$[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}+2bx]_0^1=b\Rightarrow a-2b=\frac{2}{3}\qquad(2)$$

由(1),(2)解得 $a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

所以$f(x)=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

例12. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续, 且 $f(x)>0$, 证明

$$F(x)=\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

只要证

$F'(x)>0$

证法一:

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

令 $g(x)=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$

例12. 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$内连续,且 $f(x)>0$, 证明

$$F(x)=\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

$$F'(x)=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

令$g(x)=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t\,f(t)\mathrm{d}t$

$$g'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)>0$$

$$g(x)\geq g(0)=0$$

例12. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$，证明

$$F(x)=\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

证法二:

$$F'(x)=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$\because f(t)$ 不变号

$$=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\xi\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$(0<\xi<x)$

$$=\frac{(x-\xi)f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$\because f(t)>0$

$\therefore \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t>0$

重要！ $\int_0^a af(t)\mathrm{d}t = a\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ a是常数

令 $\varphi(x) = \int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$, $\psi(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ $\forall$常数x_0 $\Rightarrow \varphi(x) = \psi(x), \ \forall x$

$$\Rightarrow x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x xf(t)\mathrm{d}t \neq \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)' = xf(x)$$

$$\left(\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t\right)' = \left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + xf(x)$$

$$f(x)\int_a^x dt = \int_a^x f(x)dt \neq \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

例12. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$，证明

$$F(x)=\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t \Big/ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

在 $(0,+\infty)$ 内为单调递增函数 .

证法三:

$$F'(x)=\frac{f(x)\left[x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right]}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\cdot(x-\xi) f(\xi)\, x}{\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}>0$$

$\therefore\ F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增函数. $\quad (0<\xi<x)$

例13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续且单调增加，

求证 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

证明：作辅助函数 $F(x)=\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

则 $F(a)=0$，且对任意 $x\in(a,b)$有

$$F'(x)=xf(x)-\frac{a+x}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{x-a}{2}f(\xi)$$

$$=\frac{x-a}{2}(f(x)-f(\xi))>0 \qquad (a<\xi<x)$$

则 $F(x)$ 单调增加，从而 $F(b)\ge F(a)=0$

即 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$